

大圣学成·数学科考试要点

第一章 集合

一、考试要点

1. 理解集合的概念

掌握集合的表示方法: (1) 列举法 (2) 描述法

2. 了解元素与集合的关系

理解集合与集合的关系: 包含, 真包含, 相等

3. 理解集合的运算

(1) 交集 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

(2) 并集 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

(3) 补集 $A \subseteq U, \complement_U A = \{x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$

4. 正确使用符号

$\in, \notin, \subseteq, \supseteq, \subsetneq, \supsetneq, \cap, \cup, \complement_U A$

5. 了解充分条件, 必要条件和充要条件

二、知识要点

1. 集合及其运算

(1) 集合的有关概念

① 集合: 一般地, 把一些能够确定的对象看成一个整体, 这个整体是由这些对象的全体构成的集合.

② 元素: 构成集合的每个对象都叫作集合的元素.

③ 特征: 构成集合的元素必须符合确定性、互异性和无序性.

④ 常见数集: 自然数集: N ; 正整数集: N_+ 或 N^* ; 整数集: Z ; 有理数集: Q ; 实数集: R

(2) 集合的表示方法

① 列举法: 把集合中的元素一一列举出来, 写在花括号内表示这个集合. 例如: 中国古代的四大发明构成的集合, 可表示为 {指南针, 造纸术, 活字印刷术, 火药}.

② 描述法: 用特征性质表示集合. 例如: 一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解集可表示为

$\{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

(3) 集合之间的关系

① 子集: 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫集合 B 的子集, 记作: $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

② 真子集: 如果集合 A 是集合 B 的子集, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫集合 B 的

真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$, 读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”.

③等集: 如果两个集合的元素完全相同, 那么这两个集合相等. 记作 $A = B$.

(4)集合的运算

①交集: 给定两个集合 A, B , 由既属于 A 又属于 B 的所有公共元素构成的集合, 叫作 A, B 的交集. 记作: $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”.

②并集: 给定两个集合 A, B , 把它们所有的元素合并在一起构成的集合, 叫作 A, B 的并集. 记作: $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”.

③补集: 如果集合 A 是全集 U 的一个子集, 由 U 中的所有不属于 A 的元素构成的集合, 叫作 A 在 U 中的补集. 记作: $\complement_U A$, 读作“ A 在 U 中的补集”.

2. 充要条件

若 p 则 q 是真命题. 由 p 可推出 q , 用符号记作: $p \Rightarrow q$, 读作“ p 推出 q ”. p 推出 q 还可表述为 p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件.

若 p 是 q 的充分条件 ($p \Rightarrow q$), 并且 p 还是 q 的必要条件 ($q \Rightarrow p$), 则称 p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件. 记作 $p \Leftrightarrow q$. (p 与 q 等价, q 当且仅当 p).

第二章 不等式

一、考试要点

1. 理解不等式的性质: 传递性, 加法法则, 乘法法则及三条推论

2. 了解区间的正确使用

3. 熟练掌握一元一次 (含 $|ax+b| \geq c$ 或 $|ax+b| \leq c$) 不等式或不等式组及一元二次不等式的解法

二、知识要点

1. 实数大小的基本性质

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b \quad a - b = 0 \Leftrightarrow a = b \quad a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

2. 不等式的基本性质

(1) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$. (传递性)

(2) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$. (加法法则)

推论 1. $a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$. (移项法则)

推论 2. $a > b$ 且 $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

(3) $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

$a > b, c < 0$, 则 $ac < bc$. (乘法法则)

推论 3. $a > b > 0$ 且 $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

3. 区间

$$\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

$$\{x | x \geq a\} = [a, +\infty)$$

$$\{x|a < x < b\} = (a, b) \quad \{x|x > a\} = (a, +\infty)$$

$$\{x|a \leq x < b\} = [a, b) \quad \{x|x \leq a\} = (-\infty, a]$$

$$\{x|a < x \leq b\} = (a, b] \quad \{x|x < a\} = (-\infty, a)$$

4. 一次不等式 $ax > b$ 的解法

当 $a > 0$ 时, 解集是 $(\frac{b}{a}, +\infty)$.

当 $a < 0$ 时, 解集是 $(-\infty, \frac{b}{a})$.

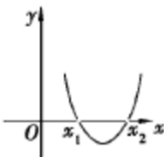
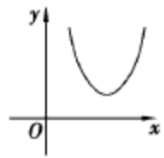
5. 一元一次不等式组的解法

求几个不等式的解集的公共部分, 即它们的交集.

6. 一元二次不等式的解法

(1) 一元二次不等式的图像解法

表 2-1 ($a > 0$)

判 Δ 符号	方程根	函数图像	不等式的解集	
$\Delta = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c = 0$	$y = ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)		$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x x_1 < x < x_2\}$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$		$\{x x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\emptyset$
$\Delta < 0$	没有实根		$\{x x \in R\}$	$\emptyset$

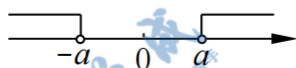
若 $a < 0$, 可先将二次项系数化成正数再求解.

(2) $(x-a)(x-b) > 0$ 可化为 $\begin{cases} x-a > 0 \\ x-b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-a < 0 \\ x-b < 0 \end{cases}$

$(x-a)(x-b) < 0$ 可化为 $\begin{cases} x-a > 0 \\ x-b < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-a < 0 \\ x-b > 0 \end{cases}$

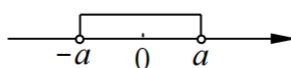
7. 含绝对值的不等式的解法

(1) $|x| > a (a > 0)$



$$\{x|x > a \text{ 或 } x < -a\}$$

$|x| < a (a > 0)$



$$\{x|-a < x < a\}$$

(2) $|ax+b|<c$ 和 $|ax+b|>c (c>0)$

表 2-2

类型	化去绝对值后	集合上解的意义区别
$ ax+b <c$	$-c<ax+b<c$	$ x ax+b>-c \cap x ax+b<c$ 交
$ ax+b >c$	$ax+b<-c$, 或 $ax+b>c$	$ x ax+b<-c \cup x ax+b>c$ 并

第三章 函数

一、考试要点

1. 理解函数的概念,理解函数的表示法:解析法,列表法,图像法,掌握函数的定义域及一些常见函数的值域
2. 了解函数的单调性和奇偶性,会用图像法和定义法判断一些常见函数的单调性和奇偶性
3. 理解一次函数和二次函数的概念、图像和性质
4. 了解函数的应用,能灵活运用二次函数的知识解决有关问题

二、知识要点

1. 函数的概念

(1) 定义

① 设集合 A 是一个非空的实数集,对 A 内的任意的实数 x ,按照某个确定的法则 f ,有唯一确定的实数 y 与它相对应,则称这种对应关系为集合 A 上的一个函数.记作: $y=f(x)$, x 为自变量, y 为因变量.

② 定义域: 自变量 x 的取值集合.

③ 值域: 因变量 y 的集合.

(2) 函数的三要素: 定义域, 值域, 对应法则.

(3) 函数的表示法: 解析法, 列表法, 图像法.

(4) 函数的定义域求法

表 2-3

$f(x)$ 的形式	函数的定义域
整式	R
分式	使分母不为 0 的实数的集合
偶次根式	使根号内的式子大于或等于 0 的实数的集合
由几个部分的数学式子构成的	使各部分式子都有意义的实数的集合,即求交集

2. 函数的性质

(1) 函数的单调性 (增减性)

① 增函数: 如果在给定的区间上自变量增大 (减小) 时, 函数值也随着增大 (减小), 从左向右, 图像上升.

② 减函数: 如果在给定的区间上自变量增大 (减小) 时, 函数值反而随着减小 (增大), 从左向右, 图像下降.

(2) 函数的奇偶性

① 奇函数: 如果对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 A 内的任意一个值 x , 都有 $f(-x)=-f(x)$. 图像关于原点

对称.

②偶函数: 如果对于函数 $y = f(x)$ 的定义域 A 内的任意一个值 x , 都有 $f(-x) = f(x)$. 图像关于 y 轴对称.

(3)一次函数

$$y = kx + b \ (k \neq 0, x \in R) \begin{cases} b = 0 \text{ 时, 图像是一条过原点的直线} \\ b \neq 0 \text{ 时, 图像是一条不过原点的直线} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > 0 \text{ 时, 一次函数是增函数} \\ k < 0 \text{ 时, 一次函数是减函数} \end{cases}$$

(4)二次函数

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \ (a \neq 0, x \in R) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

性质: 图像是一条抛物线, 顶点的坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, 对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$.

$$\begin{cases} a > 0 \text{ 时, 图像开口向上, 当 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, 取最小值 } \frac{4ac - b^2}{4a}. \\ \text{在区间 } (-\infty, -\frac{b}{2a}] \text{ 上是减函数, 在 } [-\frac{b}{2a}, +\infty) \text{ 上是增函数.} \\ a < 0 \text{ 时, 图像开口向下, 当 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, 取最大值 } \frac{4ac - b^2}{4a}. \\ \text{在区间 } (-\infty, -\frac{b}{2a}] \text{ 上是增函数, 在 } [-\frac{b}{2a}, +\infty) \text{ 上是减函数.} \end{cases}$$

第四章 指数函数与对数函数

一、考试要点

1. 理解整数指数和有理指数幂的概念, 掌握整数指数和有理指数幂的运算; 了解幂函数的概念
2. 理解对数的概念, 了解对数的运算法则
3. 理解指数函数、对数函数的概念、图像和性质
4. 了解常用对数和自然对数, 了解换底公式
5. 了解指数函数、对数函数的应用

二、知识要点

1. 指数与指数函数

(1) 有理指数幂

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \neq 0, n \in N)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (m, n \in N_+, a > 0) \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (m, n \in N_+, a > 0)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (n \in N_+, a > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ 为偶数} \\ a, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(2) 实数指数幂运算法则

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \quad (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha \quad (a > 0, b > 0, \alpha, \beta \in R)$$

(3) 幂函数

① 定义: 一般地, 形如 $y = x^a$ ($a \in R$) 的函数叫幂函数.

② 幂函数的图像特征: 当 $a > 0$ 时, 函数图像经过原点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$, 当 $a < 0$ 时, 函数图像经过点 $(1, 1)$.

③ 幂函数性质: 当 $a > 0$ 时, 函数在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 当 $a < 0$ 时, 函数在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

(4) 指数函数

① 定义: 一般地, 形如 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, x \in R$) 的函数叫作指数函数.

② 图像和性质:

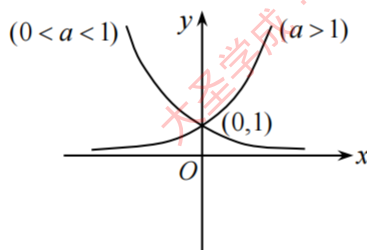


图2-1

定义域: $(-\infty, +\infty)$.

值域: $(0, +\infty)$.

过定点 $(0, 1)$.

当 $a > 1$ 时, 在实数集上为增函数,

当 $0 < a < 1$ 时, 在实数集上为减函数.

2. 对数与对数函数

(1) 对数

① 对数概念: 一般地, $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, N > 0$), 称幂指数 b 是以 a 为底 N 的对数,

记作: $b = \log_a N$.

② 对数恒等式: $a^{\log_a N} = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1, N > 0$).

③ 对数的性质: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, 零和负数没有对数. ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

④自然对数:以无理数 $e = 2.71828 \cdots$ 为底的对数, 记作: $\ln N = \log_e N$. 常用对数:以 10 为底的对数,

记作 $\lg N = \log_{10} N$

⑤换底公式: $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} (a > 0, b > 0, N > 0 \text{ 且 } a \neq 1, b \neq 1)$.

(2)对数的运算法则

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N. (M > 0, N > 0, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N. (M > 0, N > 0, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$\log_a M^n = n \log_a M (n \in R) (M > 0, N > 0, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

(3)对数函数

①定义:一般地,形如 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, x > 0)$ 的函数叫作对数函数.

②图像和性质:

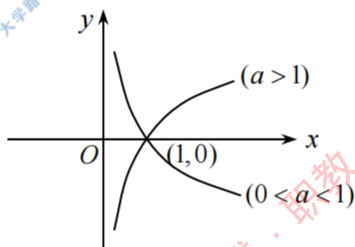


图2-2

定义域: $(0, +\infty)$.

值域: $(-\infty, +\infty)$.

过定点 $(1, 0)$.

当 $a > 1$ 时,在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

当 $0 < a < 1$ 时,在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

第五章 三角函数

一、考试要点

1.了解角的概念的推广,会进行弧度与角度的换算,理解任意角的三角函数的概念(正弦、余弦、正切函数),掌握三角函数值在各象限的符号和特殊角的三角函数值

2.掌握同角三角函数的基本关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. 会用它们进行计算、化简、证明、

求值

3.理解正弦函数,余弦函数的图像和性质

4.了解诱导公式、和角公式和二倍角公式,了解正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质

5.理解正弦定理、余弦定理及其应用

6.了解三角函数的实际应用

二、知识要点

1.角的概念的推广

(1)角的种类

- ①正角:按逆时针方向旋转而成的角叫作正角.
 ②负角:按顺时针方向旋转而成的角叫作负角.
 ③零角:射线没有旋转时,也看成一个角叫作零角.

(2)终边相同的角

所有与角 α 始边与终边都相同的角(包括角 α 在内)构成的集合为 $\{x|x=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in Z\}$

(3)角的象限

在平面直角坐标系中,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,这样放置的角,在坐标系中处于标准位置.处于标准位置的角的终边在第几象限,就叫作第几象限角,终边在坐标轴上的角不属于任何象限.

2.弧度制

(1)角度制

圆周角的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角叫作1度的角,记作:1°.用度做单位来度量角的制度叫作角制度.

(2)弧度制

弧长等于半径长的圆弧所对的圆心角叫作1弧度的角,记作1弧度或1 rad.以弧度为单位来度量角的单位制叫弧度制.

正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为0.

$$|\alpha| = \frac{l}{r} \text{ 或 } l = |\alpha| r.$$

(3)角度制与弧度制的换算关系

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 18' = 57.30^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$$

(4)常用特殊角的度数与弧度数的换算

表 2-4

角度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

3.任意角三角函数的定义

(1)任意角三角函数的定义

在平面直角坐标系中,设 $p(x,y)$ 为任意角 α 终边上的一点.点 p 到原点的距离为 $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

正弦函数 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$,余弦函数 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$,正切函数 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

(2)各象限的角的三角函数值的正负号

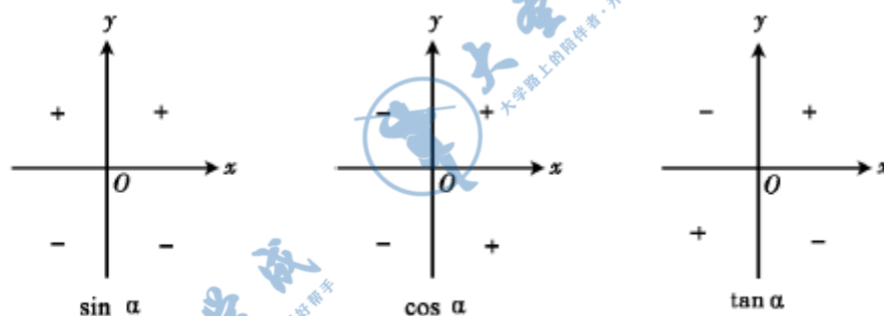


图 2-3

(3)特殊角的三角函数值

表 2 - 5

角 α	30°	45°	60°
角 α 的弧度数	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

表 2 - 6

角 α	0°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	不存在	0	不存在	0

4.同角三角函数的基本关系式

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

【注意】(1)“同角”即每个基本关系中出现的角都相同.

(2)只有当 α 的值是使两边都有意义时才成立.

5.诱导公式

(1)角 α 与 $\alpha + k \cdot 2\pi (k \in \mathbb{Z})$ 的三角函数间的关系

$$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha, \quad \tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(2)角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

(3)角 α 与 $\alpha \pm \pi$ 的三角函数间的关系

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha, \quad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha, \quad \tan(\alpha \pm \pi) = \tan \alpha.$$

(4)角 α 与 $\pi - \alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

(5)角 α 与 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的三角函数间的关系

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos \alpha, \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin \alpha.$$

6.正弦、余弦函数的图像和性质

(1)正弦、余弦函数的图像

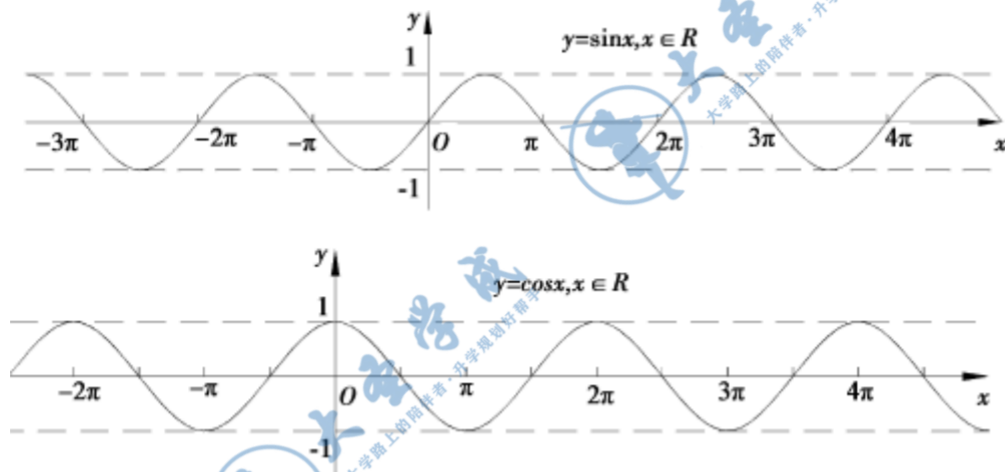


图 2-4

(2)“五点法”

①“五点法”作正弦函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像五个关键点为:

$$(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0).$$

②“五点法”作余弦函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像五个关键点为:

$$(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, -1), (\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, 1).$$

(3)正弦函数的性质

表 2-7

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-1, 1]$ 当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; 当 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$.	$[-1, 1]$ 当 $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; 当 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$.
周期性	周期为 2π	周期为 2π
奇偶性	奇函数	偶函数
单调性	在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 内是增函数, 其函数值由 -1 增大到 1 . 在 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 内是减函数, 其函数值由 1 减小到 -1 .	在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 内都是增函数,其函数值由 -1 增大到 1 . 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 内都是减函数,其函数值由 1 减小到 -1 .

7.和角公式

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha+\beta})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha-\beta})$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (S_{\alpha+\beta})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (S_{\alpha-\beta})$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (T_{\alpha+\beta})$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (T_{\alpha-\beta})$$

8.二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

9.正余弦定理

(1)正弦定理

在任何一个三角形中,各边长和它所对应的角的正弦值的比值相等.即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

正弦定理可用来求解三角形中的未知元素,解决两种情形:A.已知两角和一边,求其他元素.B.已知两边和其中一边所对的角,求其他元素.

(2)余弦定理

三角形任何一边长的平方等于其他两边长的平方和减去这两边的长与它们的夹角的余弦乘积的 2 倍.

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

余弦定理可用来求解三角形中的未知元素,解决两种情形:A.已知三角形的两边及夹角,求其他元素.B.已知三角形的三边,求其他元素.

第六章 数列

一、考试要点

- 1.了解数列的概念及数列通项公式的意义
- 2.理解等差数列、等比数列的概念
- 3.掌握公差和公比及通项公式、中项公式和前 n 项和公式
- 4.了解数列的应用

二、知识要点

1.数列

(1)数列的定义

数列是按一定次序排列的一列数.数列中的每一个数叫作这个数列的项.

①有穷数列:项数有限的数列.

②无穷数列:项数无限的数列.

(2)通项公式

用项数 n 来表示该数列相应项的公式: $a_n = f(n) (n=1, 2, 3 \cdots)$.

(3)通项与前 n 项和的关系

设 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 表示数列前 n 项和,则 $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$

2.等差数列

(1)等差数列的概念

如果一个数列从它的第2项起,每一项与它前一项的差等于同一个常数,该数列叫等差数列.这个常数叫作等差数列的公差,用字母 d 表示.

$a_n - a_{n-1} = d$ (d 为常数), $d=0$ 的等差数列叫常数列.

(2)等差数列的通项公式

$a_n = a_1 + (n-1)d$, 变形为 $a_n = a_m + (n-m)d$.

(3)等差中项

a, A, b 成等差数列 $\Leftrightarrow A = \frac{a+b}{2}$ (A 称为 a, b 的等差中项).

(4)等差数列的前 n 项和公式

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

在这两个公式中,都包含四个变量,只要知道其中任意三个,可求出第四个.

(5)等差数列的性质

①若 $m+n=p+q$,则 $a_m + a_n = a_p + a_q$

②若 $m+n=2p$,则 $a_m + a_n = 2a_p$

③ $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等差数列

3.等比数列

(1)等比数列的概念

如果一个数列从它的第2项起,每一项与它前一项的比等于同一个常数,该数列叫等比数列.这个常数叫作等比数列的公比,用字母 q 表示.

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ($q \neq 0, q$ 为常数)

(2)等比数列的通项公式

$a_n = a_1 q^{n-1}$ ($a_1 \neq 0, q \neq 0$), 变形为 $a_n = a_m q^{n-m}$

(3)等比中项

a, G, b 成等比数列 $\Leftrightarrow G = \pm \sqrt{ab}$ ($ab > 0$) (G 称为 a, b 的等比中项).

(4)等比数列的前 n 项和公式

$$q=1 \text{ 时, } S_n = na_1; \quad q \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

在这两个公式中,都包含四个变量,只要知道其中任意三个,可求出第四个.

(5)等比数列的性质

①若 $m+n=p+q$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

②若 $m+n=2p$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p^2$

第七章 平面向量

一、考试要点

1. 了解向量的概念, 了解向量的几何表示, 会进行向量的加法、减法和数乘向量运算
2. 了解两个向量平行的条件, 了解向量的平面分解定理
3. 了解向量的直角坐标概念, 掌握向量的坐标运算, 了解平行向量坐标间的关系
4. 了解向量的内积概念及其运算, 了解两个向量垂直的条件
5. 了解向量的应用

二、知识要点

1. 位移与向量的表示

(1)数量

只有大小的量(标量).例如:时间、面积、质量.

(2)向量

具有大小和方向的量(矢量).例如:位移、力、速度.

①有向线段:标有方向的线段.

②自由向量:只有大小和方向, 而无特定位置的向量.

③向量的表示:(1)用有向线段表示.(2)印刷时, 用黑体小写英文字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ 表示向量.

④向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度(模): 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度.

⑤相等向量:大小相等, 方向相同的向量.

⑥零向量:长度等于 0 的向量, 记作: $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定.

⑦单位向量:长度等于 1 个单位长度的向量.

⑧与非零向量 $\mathbf{a}$ 同方向且长度等于 1 的向量叫作向量 $\mathbf{a}$ 的单位向量. 非零向量 $\mathbf{a}$ 的单位向量为 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

⑨平行(共线)向量:方向相同或相反的向量: $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行, 记作: $\mathbf{a} // \mathbf{b}$.

⑩规定:零向量与任意向量平行.

⑪位置向量:给定一点 O 和向量 $\mathbf{a}$, 过点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$,

则点 A 相应于点 O 的位置被向量 $\mathbf{a}$ 所唯一确定. 这时向量 $\overrightarrow{OA}$ 通常叫

作点 A 相应于点 O 的位置向量. (图 2-5)

2. 向量的加法

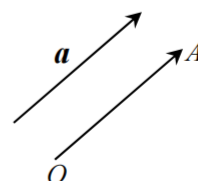


图 2-5

(1) 向量加法的三角形法则

已知 $\vec{a}, \vec{b}$, 在平面内任取一点 A , 作 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, 作出 $\vec{AC}$.

$\vec{AC}$ 叫作向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和 (或和向量). 记作 $\vec{a} + \vec{b}$,

即 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

上述求两个向量的作图法则叫作向量求和的三角形法则.

(如图 2-6)

对于零向量与任一向量 $\vec{a}$ 的和, 有 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

(2) 向量加法的平行四边形法则

若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 作 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$,

以 $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$,

则对角线上的向量 $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. 这个法则叫作向量

求和的平行四边形法则. (如图 2-7)

(3) 多个向量的求和法则: 以四个向量为例说明 (如图 2-8)

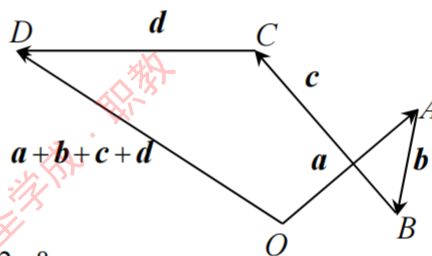
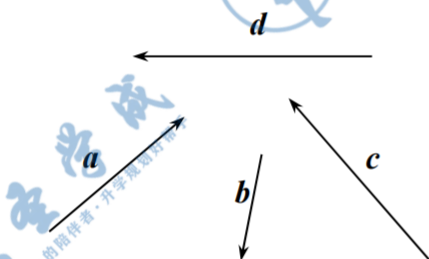


图 2-8

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}.$$

3. 向量的减法

(1) 定义

① 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则向量 $\vec{BA}$ 叫作向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$

的差, 记作: $\vec{a} - \vec{b}$. 即 $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB}$. (如图 2-9)

由此得: 如果把两个向量的始点放在一起, 则这两个向量的差是减向量的终点到被减向量的终点的向量.

② 相反向量: 与非零向量 $\vec{a}$ 等长且方向相反的向量叫作 $\vec{a}$ 的相反向量 (如图 2-10).

记作: $-\vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{0}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量.

(2) 运算法则

① $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

② $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (向量加法的交换律)

③ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (向量加法的结合律)

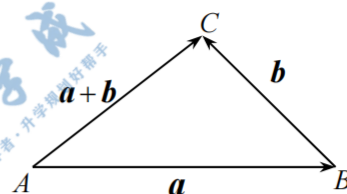


图 2-6

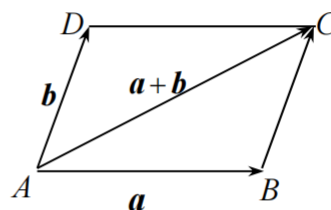


图 2-7

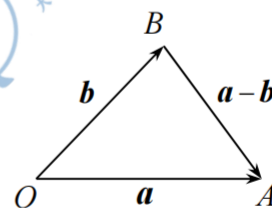


图 2-9

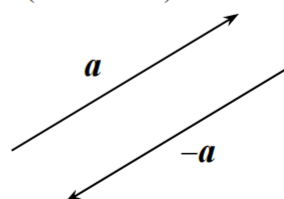


图 2-10

$$\textcircled{4} \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

4. 数乘向量

(1) 定义

实数 λ 和向量 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\mathbf{a}$. $\lambda\mathbf{a}$ 的长是 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$. $\lambda\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \lambda \neq 0$) 在 $\lambda > 0$ 时, 与 $\mathbf{a}$ 同方向; 在 $\lambda < 0$ 时, 与 $\mathbf{a}$ 反方向. 当 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(2) 几何意义

把向量 $\mathbf{a}$ 沿着 $\mathbf{a}$ 的方向 (或反方向) 放大 (或缩小).

(3) 数乘向量运算满足下列运算律

设 λ, μ 为实数, 则: $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$, $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

向量的加法、减法与数乘向量的综合运算, 叫作向量的线性运算.

(4) 平行向量基本定理

如果 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. 反之, 如果 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 且 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 则一定存在一个实数 λ , 使 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

5. 向量的坐标运算

(1) 向量的分解

平面向量基本定理: 如果 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是平面上两个不平行的向量, 那么对该平面上的任一向量 $\mathbf{a}$ 存在唯一的一对实数 a_1, a_2 , 使 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$.

(2) 向量的直角坐标运算

① 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$,

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$, $\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$.

② 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

(3) 用向量的坐标表示向量平行和垂直的条件

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, 则 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.

6. 向量的内积及其运算

(1) 向量的内积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的内积是一个实数, 可以等于正数、负数、零

① 内积的主要性质: A. 如果 $\mathbf{e}$ 是单位向量, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle$. B. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

C. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$ 或 $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$. D. $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$.

② 内积运算律: A. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. B. $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}) \cdot \lambda\mathbf{b}$. C. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(2) 向量内积的坐标运算与距离公式

定理:在直角坐标平面 xOy 内, 若 $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2)$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$,

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_1, a_1) \cdot (a_2, a_2) = a_1^2 + a_2^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

如果 $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, 则 $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

第八章 平面解析几何

一、考试要点

1. 掌握两点间的距离公式及中点公式
2. 理解直线斜率的概念, 掌握斜率与倾斜角的关系. 会求直线的斜率和直线方程, 能灵活运用直线方程解决有关问题
3. 理解掌握两条直线平行与垂直的条件, 会根据直线方程求点到直线的距离
4. 掌握圆的标准方程和一般方程以及直线与圆的位置关系
5. 理解椭圆的概念及其标准方程和性质, 了解双曲线、抛物线的概念及其标准方程和性质及其标准方程和性质

二、知识要点

1. 坐标系中的基本公式

在数轴上, 如果 $A(x_1), B(x_2)$, 则 $|\overline{AB}| = |x_2 - x_1|$; $\overline{AB}$ 的中点坐标 x 满足 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

在直角坐标系中, 如果 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

$\overline{AB}$ 中点坐标 (x, y) 满足 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ (中点公式).

2. 直线的方程

(1) 直线与方程

在平面直角坐标系内, 给定一条直线, 如果直线上点的坐标都满足某个方程, 而且满足这个方程的坐标所表示的点都在给定的直线上, 那么这个方程叫作直线方程.

(2) 直线的倾斜角和斜率

① 倾斜角: 平面直角坐标系内, 直线向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角 α 叫作直线的倾斜角, 倾斜角 α 的取值范围是 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$.

② 斜率: 倾斜角不是 90° 的直线, 它的倾斜角的正切值叫作这条直线的斜率. 用 k 表示, 即 $k = \tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$).

③ 强调: 平行于 y 轴的直线斜率不存在.

当 $x_1 \neq x_2$, 则过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率为: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

表 2-8

特殊角倾斜角	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
斜率 k	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) 直线方程的几种形式

表 2-9

名称	已知条件	直线方程
点斜式	直线上一点 $P(x_0, y_0)$ 直线斜率 k	$y - y_0 = k(x - x_0)$
斜截式	直线的斜率 k 直线在 y 轴上截距 b	$y = kx + b$
一般式		$Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

几种特殊类型的直线方程:

① 平行于 x 轴的直线方程: $y = b$. 如 x 轴: $y = 0$.

② 平行于 y 轴的直线方程: $x = a$. 如 y 轴: $x = 0$.

③ 过原点的直线方程: $Ax + By = 0$.

(4) 直线与直线的位置关系

表 2-10

充要条件 位置关系	斜截式	一般式
	$l_1: y = k_1x + b_1$ $l_2: y = k_2x + b_2$ (l_1, l_2 的斜率都存在)	$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (A_2, B_2, C_2 均不为零)
平行	$k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
垂直	$k_1 k_2 = -1$	$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$
相交	$k_1 \neq k_2$	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$
重合	$k_1 = k_2, b_1 = b_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

3. 圆的方程

(1) 定义

圆是平面内到一定点的距离等于定长的点的轨迹. 定点是圆心, 定长是圆的半径.

(2) 圆的标准方程

以 $C(a,b)$ 为圆心,以 r 为半径的圆的方程叫圆的标准方程: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. 当切点为 (x_0, y_0)

时,圆的切线方程为 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.

圆心在原点时: $a = 0, b = 0$, 则 $x^2 + y^2 = r^2$. 当切点为 (x_0, y_0) 时,圆的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$.

圆的一般方程: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, $(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$,

(D, E, F 为常数, 且 $D^2 + E^2 - 4F > 0$). 圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径 $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

(3) 直线与圆的位置关系

设圆心到直线的距离为 d , 圆的半径为 r , 则: $d > r$ 时, 直线与圆相离; $d = r$ 时, 直线与圆相切;

$d < r$ 时, 直线与圆相交.

4. 椭圆

(1) 定义

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之和为常数 $2a (2a > |F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫椭圆. F_1, F_2 叫焦点, $|F_1F_2|$

叫焦距.

(2) 中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上或 y 轴上的椭圆的标准方程、图形及性质如表 2-11 所示

表 2-11

标准方程		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$
图形			
性质	范围	$ x \leq a, y \leq b$	$ x \leq b, y \leq a$
	对称性	关于 x 轴、 y 轴对称, 关于坐标原点对称, 椭圆的中心在坐标原点	
	顶点坐标	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ $B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$ $B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
	焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
	离心率	$e = \frac{c}{a} (0 < e < 1)$	
	a, b, c 的意义及关系	长轴长: $ A_1A_2 = 2a$ 短轴长: $ B_1B_2 = 2b$ 焦距: $ F_1F_2 = 2c, c = \sqrt{a^2 - b^2}$	

5. 双曲线

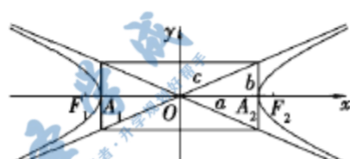
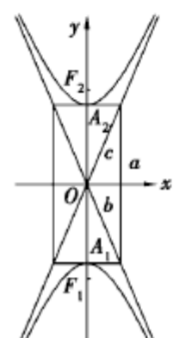
(1)定义

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值等于常数 $2a$ ($2a < |F_1F_2|$ 且 $2a$ 不等于零) 的点的轨迹

叫双曲线. F_1, F_2 叫焦点, $|F_1F_2|$ 叫焦距.

(2)中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上或 y 轴上的双曲线的标准方程、图形及性质如表 2-12 所示

表 2 - 12

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图形		

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
范围	$ x \geq a, y \in R$	$ y \geq a, x \in R$
对称性	关于 x 轴, y 轴对称, 关于坐标原点对称, 双曲线的中心在坐标原点	
顶点坐标	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
离心率	$e = \frac{c}{a} (e > 1)$	
a, b, c 的意义及关系	实轴长: $ A_1A_2 = 2a$ 虚轴长: $ B_1B_2 = 2b$ 焦距: $ F_1F_2 = 2c, c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

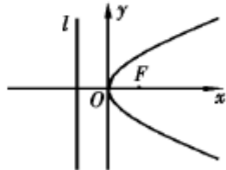
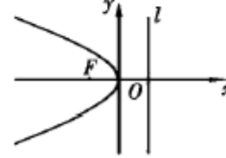
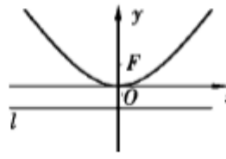
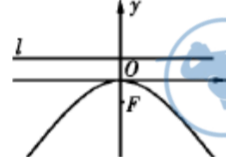
6. 抛物线

(1)定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫抛物线. 点 F 叫焦点, 定直线 l 叫准线.

(2)顶点在坐标原点, 对称轴为坐标轴的四种形式的抛物线的标准方程、图形及性质如表 2-13 所示

表 2-13

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2 = 2px$ ($p > 0$)	$(\frac{p}{2}, 0)$	$x = -\frac{p}{2}$
	$y^2 = -2px$ ($p > 0$)	$(-\frac{p}{2}, 0)$	$x = \frac{p}{2}$
	$x^2 = 2py$ ($p > 0$)	$(0, \frac{p}{2})$	$y = -\frac{p}{2}$
	$x^2 = -2py$ ($p > 0$)	$(0, -\frac{p}{2})$	$y = \frac{p}{2}$

(3) 离心率

抛物线上的点 M 到焦点的距离与点 M 到准线的距离的比叫抛物线的离心率, 记作: e , $e=1$.

第九章 立体几何

一、考试要点

1. 了解平面的基本性质, 理解空间中点、直线和平面的位置关系
2. 理解直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直的判定定理与性质定理
3. 了解常用几何体(正方体、长方体、正四面体), 会进行简单的空间距离和角的计算
4. 了解柱、锥、球及其简单组合体的结构特征及面积、体积的计算

二、知识要点

1. 平面基本性质

(1) 性质 1

如果直线 l 上的两点在平面 α 内, 那么直线 l 上的所有点都在平面 α 内. 此时称直线 l 在平面 α 内或平面 α 经过直线 l . 记作 $l \subseteq \alpha$.

(2) 性质 2

如果两个平面有一个公共点, 那么它们一定还有其他公共点, 并且所有公共点的集合是过这个点的一条直线.

(3) 性质 3

不在同一条直线上的三个点, 可以确定一个平面.

推论 1: 直线与这直线外的一点可以确定一个平面.

推论 2: 两条相交直线可以确定一个平面.

推论 3: 两条平行线可以确定一个平面.

2. 位置关系

(1) 直线与直线的位置关系

① 共面直线: 两条直线在同一平面内, 包括平行、相交.

② 异面直线: 不同在任何一个平面内的两条直线.

③ 平行线的性质: 平行于同一条直线的两条直线平行.

(2) 直线与平面的位置关系

① 相交: 一条直线与平面只有一个公共点.

② 平行: 一条直线与平面没有任何公共点.

③ 直线在平面内: 直线上所有的点都在平面内.

④ 直线在平面外: 直线与平面平行和相交统称为在平面外.

(3) 平面与平面的位置关系

① 平行: 两个平面没有公共点.

② 相交: 两个平面有一条公共直线.

3. 平行关系

(1) 直线与平面平行

① 判定定理: 如果平面外一条直线平行平面内一条直线, 那么这条直线平行这个平面.

② 性质定理: 如果一条直线平行一个平面, 并且经过这条直线的一个平面和这个平面相交, 那么这条直线与交线平行.

(2) 平面平行平面

① 判定定理: 如果一个平面内两相交直线都与另一个平面平行, 那么这两个平面平行.

② 性质定理: 如果一个平面与两个平行平面相交, 那么它们的交线平行.

4. 角

(1) 空间两条直线所成的角

① 异面直线所成的角: 经过空间任意一点分别作与两条异面直线平行的直线, 这两条相交直线的夹角叫作两条异面直线所成的角.

② 异面直线垂直: 异面直线所成的角为直角.

(2) 直线与平面所成的角

① 直线与平面垂直: A. 判定定理: 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线与这个平面垂直. B. 性质定理: 垂直于同一个平面的两条直线互相平行.

② 直线与平面所成的角: 斜线 l 与它在平面 α 内的射影 l' 所成的夹角, 叫作直线 l 与平面 α 所成的角. 规定: 当直线垂直平面时, 所成的角为 90° ; 当直线平行平面和直线在平面内时, 所成的角为 0° .

(3) 平面与平面所成的角

① 二面角的平面角: 过棱上的一点, 分别在二面角的两个面内作与棱垂直的射线, 以这两条射线为边的最小正角叫作二面角的平面角.

② 平面与平面垂直: 两个平面相交, 如果所成的二面角是直二面角. A. 判定定理: 一个平面经过另一个平面的垂线, 则这两个平面互相垂直. B. 性质定理: 如果两个平面互相垂直, 那么一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

5. 柱、锥、球及其简单组合体

(1) 棱柱

① 定义: 有两个平面互相平行, 其余每相邻两个面的交线都互相平行的多面体叫作棱柱.

② 斜棱柱: 侧棱与底面斜交的棱柱.

③ 直棱柱: 侧棱与底面垂直的棱柱.

④正棱柱:底面是正多边形的直棱柱.

$$S_{\text{正棱柱侧}}=ch \quad S_{\text{正棱柱全}}=ch+2S_{\text{底}} \quad V_{\text{正棱柱}}=S_{\text{底}}h$$

(2)棱锥

①定义:一个面是多边形,其余各面都是三角形,并且这些三角形有一个公共点的多面体.

②正棱锥:底面是正多边形,顶点在底面的射影是底面的中心的棱锥.

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch' \quad S_{\text{正棱锥全}}=\frac{1}{2}ch'+S_{\text{底}} \quad V_{\text{正棱锥}}=\frac{1}{3}S_{\text{底}}h$$

(3)圆柱、圆锥、球

①圆柱:以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余各边旋转成曲面(或平面)所围成的几何体.

$$S_{\text{圆柱侧}}=2\pi rh \quad S_{\text{圆柱全}}=2\pi r(h+r) \quad V_{\text{圆柱}}=\pi r^2h$$

②圆锥:以直角三角形的一条直角边为旋转轴旋转一周,其余各边旋转而形成的曲面(或平面)所围成的几何体.

$$S_{\text{圆锥侧}}=\pi rl \quad S_{\text{圆锥全}}=\pi r(l+r) \quad V_{\text{圆锥}}=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

③球. A. 面:以半圆的直径所在的直线为旋转轴旋转一周,所形成的曲面叫作球面. B. 球体:球面所围成的几何体. C. 球的大圆:经过球心的圆;半径 R . D. 球的小圆:不经过球心的平面截球面所得的圆,半径为 r .

设球心到小圆的距离为 d , 则 $d=\sqrt{R^2-r^2}$.

$$S_{\text{球}}=4\pi R^2 \quad V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

6. 距离

求距离常常把所求的距离放置在三角形中(直角三角形优先).

第十章 概率与统计

一、考试要点

1. 掌握分类计数与分步计数原理
2. 理解排列与组合的意义,理解排列数、组合数的计算公式和组合数的性质,了解二项式定理及二项式系数的性质
3. 理解随机现象和概率的统计定义,了解基本事件、样本空间,理解古典概率的定义和性质,了解离散型随机变量及其分布
4. 了解总体、样本和简单随机抽样,了解系统抽样和分层抽样,会列频率分布表,会画频率分布直方图,会计算数据均值和标准差,能用样本均值、标准差估计总体均值、标准差

二、知识要点

1. 计数原理

(1) 分类计数原理

一般地,完成一件事有 n 类方式.第 1 类方式有 k_1 种方法,第 2 类方式有 k_2 种方法, ..., 第 n 类方

式有 k_n 种方法, 那么完成这件事的方法共有 $N = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ (种)。

(2) 分步计数原理

一般地, 完成一件事需要分成 n 个步骤, 完成第 1 个步骤有 k_1 种方法, 完成第 2 个步骤有 k_2 种方法, ...,

完成第 n 个步骤有 k_n 种方法, 那么完成这件事的方法共有 $N = k_1 \cdot k_2 \cdots k_n$ (种)。

2. 排列组合

(1) 排列及排列数

①排列定义: 一般地, 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫作从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列。特别地, 当 $m = n$ 时, 这个排列被称作全排列。

②排列数: 从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素排成一列 (考虑元素先后出现次序) 称此为一个排列, 此种排列的总数即为排列数, 即叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 记作 A_n^m 。

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1).$$

$$\text{全排列数 } A_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

$$n \text{ 的阶乘记作: } n! = A_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

(2) 组合、组合数及其组合数性质

①组合定义: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组, 叫作从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合。

②组合数: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素所有组合的个数, 叫作从 n 个元素中取出 m 个元素的组合数, 记作 C_n^m 。

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m(m-1) \cdots 2 \times 1}.$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

③组合数性质:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}, \quad C_n^0 = 1.$$

3. 二项式定理及二项式系数的性质

$$\text{二项式定理: } (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n.$$

二项式系数: $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$, 当 n 为偶数时, 中间一项二项式系数最大, 当 n 为奇数时, 中间两项二项式系数最大.

通项: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$.

二项式系数和: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

4. 概率

(1) 随机事件

- ①随机现象: 在相同条件下, 具有多种可能的结果, 而事先又无法确定会出现哪种结果的现象.
- ②随机事件: 随机试验的结果.
- ③必然事件: 必然发生的事件; 不可能事件: 在一定条件下, 不可能发生的事件, 用 Φ 表示.
- ④基本事件: 在试验和观察中不能再分的最简单的随机事件; 可以用基本事件来描绘的随机事件叫作复合事件.

(2) 频率与概率

- ①频数: 设在 n 次重复试验中, 事件 A 发生了 m 次 ($0 \leq m \leq n$), m 叫作事件 A 发生的频数.
- ②概率: 一般地, 当试验次数 n 充分大时, 如果事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总稳定在某个常数附近, 那么就把这个常数叫作事件 A 发生的概率.

(3) 古典概型

如果一个随机试验的基本事件只有有限个, 并且每个基本事件发生的可能性相同. 在古典概型中, 事件 A 包含 m 个基本事件, 那么事件发生的概率为 $P(A) = \frac{m}{n}$.

5. 总体与样本

(1) 总体与样本

- ①总体: 在统计中, 所研究对象的全体叫作总体, 组成总体的每个对象叫作个体.
- ②样本: 被抽取的个体的集合叫作总体的样本, 样本所含个体的数目叫作样本容量.
- ③三种常见抽样: **A. 简单随机抽样:** 用抽签法或随机数表法抽取样本的抽样. **B. 系统抽样:** 一般地, 当总体所含的个体较多时, 可将总体分成均衡的几个部分, 然后按照预先定出的规则, 从每一部分中抽取一定数目的个体. **C. 分层抽样:** 当总体由明显差异的几个部分组成时, 可将总体按差异情况分成互不重叠的几个部分一层, 然后按各层个体总数所占的比例来进行抽样.

用样本估计总体

①用样本的频率分布估计总体. **A. 频率:** 每组的频数与全体数据的个数之比叫作该组的频率. **B. 用样本的频率分布估计总体的步骤:** *a.* 选择适当的抽样方法得到样本数据; *b.* 计算数据最大值和最小值、确定组距和组数, 确定分点并列出频率分布表; *c.* 绘制频率分布直方图; *d.* 观察频率分布表与频率分布直方图, 根据样本的频率分布, 估计总体中某事件发生的频率.

②用样本均值、标准差估计总体. **A. 均值:** 如果有 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 那么 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 叫作这 n 个数的平均数或均值. **B. 样本标准差:** 样本方差的算术平方根, 用来表示个体与样本均值之间的偏

离程度, 即 $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}$.